erhält man $(n + 3)(216/n - 1) = 216$. Die Beziehung ist nur noch von der Anzahl $n$ der gekauften Lutscher abhängig. Durch einige Umformungen wird daraus $n^2 + 3n - 648 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen $n = 24$ und $n = -27$. Da eine negative Lutscherzahl keinen Sinn macht, muss $n = 24$ die gesuchte Lösung sein. Matthias hatte sich also an dem Kiosk vierundzwanzig Lutscher zu je neun Cent gekauft.

## 9. Das Würfelskelett

Christinas Würfelskelett bestand aus acht Eckwürfeln und zwölf Kantenwürfeln, die zwischen die Eckwürfel geklebt waren. Bei einem Spielwürfel ist die Summe der Augenzahlen auf zwei sich gegenüberliegenden Seiten immer 7. Das bedeutet, bei jedem Kantenwürfel sind sieben Augen verdeckt. Folglich müssen auch bei den beiden mit einem Kantenwürfel verleimten Eckwürfeln zusammen sieben Augen verdeckt sein. Da jeder der zwölf Kantenwürfel somit vierzehn Augen verdeckt, sind insgesamt 168 Augen unsichtbar. Von den $20 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 420$ Augen der zwanzig Würfel befinden sich also 252 auf frei liegenden Flächen.

## 10. Die Wanderung

Die beiden Familien benötigten für den Rundweg der Länge $s$ die Zeiten $t_1 = 2$ Stunden und $t_2 = 3$ Stunden und wanderten deshalb mit den Geschwindigkeiten $v_1 = s/t_1$ und $v_2 = s/t_2$. Nach dem Treffen unterwegs entfernten sie sich mit der Geschwindigkeit $v = v_1 + v_2$ voneinander. Zum Schluss, als sie sich auf dem Parkplatz wieder trafen, lag der komplette Rundweg $s$ zwischen ihnen. Angenommen, die Zeit vom Treffen der beiden Familien unterwegs bis zum Ende der Wanderung betrüge $t$, dann wäre $v = s/t$. Setzt man die Geschwindigkeiten ein, erhält man $s/t = s/t_1 + s/t_2$ oder $1/t = 1/t_1 + 1/t_2$.

Nach $t$ aufgelöst ergibt dies $t = t_1 \cdot t_2/(t_1 + t_2) = 1{,}2$ Stunden = 1 Stunde und 12 Minuten. Das Treffen fand also um 14.48 Uhr statt.

## 11. Monate mit fünf Samstagen

Da es Gemeinjahre mit 365 Tagen und Schaltjahre mit 366 Tagen gibt und beide Jahresformen mit einem Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, Samstag oder Sonntag beginnen können, sind insgesamt vierzehn verschiedene Kalender möglich. Diese vierzehn Kalender muss man auf die Anzahl der Monate mit fünf Samstagen hin untersuchen. Die Ergebnisse sind in der Tabelle aufgelistet.

| Wochentag des 1. Januar: | | Mo | Di | Mi | Do | Fr | Sa | So |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl der Monate mit 5 Samstagen: | Gemeinjahr: | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 |
| | Schaltjahr: | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 4 |

Jedes Jahr hat also mindestens vier, aber höchstens fünf Monate mit fünf Samstagen.

## 12. Der Numerologe

Die Reihe auf dem Blatt setzte sich nur aus den Zahlen zusammen, die auch auf den Kopf gestellt noch sinnvoll waren und außerdem dabei ihren Wert nicht veränderten. Sie lässt sich beliebig weit verlängern:

I, 8, II, 69, 88, 96, IOI, III, I8I, 609, 6I9, 689, 808, 8I8, 888, 906, 9I6, 986, IOOI, IIII, I69I, I88I, I96I, 6009, …

Die gesuchte Lösung lautet also III.

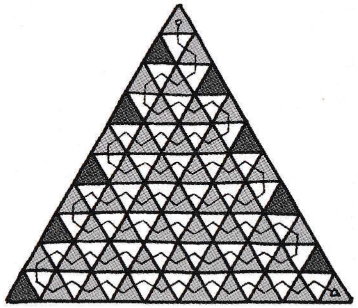
Die Liste lässt sich beliebig weit verlängern. Eine geschlossene Formel, mit der man das $n$-te Element dieser Reihe berechnen kann, gibt es bisher nicht.

## 13. Münzprobleme auf dem Fischmarkt

Betrachten wir zunächst nur die Beträge 89 und 98 Cent. Es sind jeweils mindestens sechs Münzen notwendig, um diese Beträge bilden zu können, nämlich $89 = 50 + 20 + 10 + 5 + 2 + 2$ und $98 = 50 + 20 + 20 + 5 + 2 + 1$. Um jedoch sowohl 89 als auch 98 Cent bilden zu können, benötigt man aber zwei Münzen mehr. Mit einem Satz aus einer 50-Cent-, einer 10-Cent-, einer 5-Cent- und einer 1-Cent-Münze und zwei 20-Cent- und zwei 2-Cent-Münzen kann man beide Beträge und auch alle anderen Beträge von einem Cent bis zu einem Euro bilden. Sie können es leicht überprüfen.

## 14. Das Hüpfspiel

Färbt man die hundert Felder des Dreiecks schachbrettartig immer abwechselnd schwarz und weiß, so wie es die Skizze zeigt, erhält man 55 schwarze und 45 weiße Felder. Da zwei Felder, die eine gemeinsame Kante haben, immer unterschiedlich gefärbt sind, wechselt man bei jedem Hüpfer die Farbe seines Feldes. Startet man in einem schwarzen Feld, kann die gesamte Tour aus höchstens 46 schwarzen und 45 weißen Feldern bestehen, dann gibt es kein weißes Feld mehr, in dem man noch nicht war. Das bedeutet, man kann höchstens über 91 Felder hüpfen. Dass man auch tatsächlich 91 Felder erreichen kann, zeigt die eingezeichnete Linie.



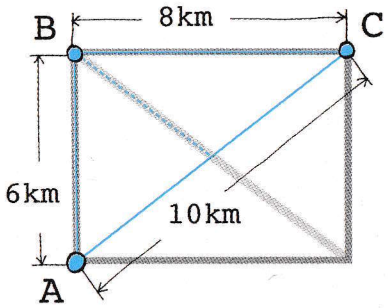
## 15. Die ägyptischen Tetraeder

Bei drei Farben kann es drei verschiedene einfarbige Tetraeder geben. Drei Tetraeder können dreifarbig sein, wobei bei jedem eine der drei Farben einmal doppelt vorkommt. Bei zweifarbigen Tetraedern können die Kombinationen weiß-schwarz, weiß-rotbraun und schwarz-rotbraun auftreten. Mit allen drei Farbkombinationen kann man jeweils drei verschiedene Färbungen ausführen. Mit der ersten Farbe färbt man entweder eine, zwei oder drei Seiten und mit der zweiten Farbe entsprechend drei, zwei oder eine Seite. Insgesamt kann man also fünfzehn Tetraeder mit drei Farben unterschiedlich färben.

## 16. Das Wechselgeld

Da Thomas' Chef zehn Mal so viele Ein- wie Zweieurostücke haben wollte, betrug die kleinstmögliche Einheit von Ein- und Zweieurostücken $10 \cdot 1\,€ + 1 \cdot 2\,€ = 12\,€$. Für den Rest sollte er Fünfeuroscheine holen, also musste dieser durch 5 teilbar sein. Das einzige Vielfache von 12 unter 100, das

## 27. Die Wanderung




Die Wege zwischen Ahausen, Bedorf und Cefeld, die Längen von sechs, acht und zehn Kilometern haben, bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Man kann dies leicht mit dem Satz des Pythagoras überprüfen: $(6\text{ km})^2 + (8\text{ km})^2 = (10\text{ km})^2$. Indem man zwei dieser Dreiecke mit den zehn Kilometer langen Seiten aneinander setzt, erhält man ein Rechteck. Die Strecke von Ahausen nach Cefeld ist eine Diagonale dieses Rechtecks, die andere verbindet Bedorf des ersten Dreiecks mit Bedorf des zweiten Dreiecks. Da sich die Diagonalen eines Rechtecks gegenseitig halbieren, ist also die Linie von Bedorf des ersten Dreiecks bis zum Schnittpunkt der Diagonalen die Abkürzung, die ich mit meiner Familie gegangen bin. Da die beiden Diagonalen auch gleich lang sind, betrug unsere gesamte Wanderstrecke $6\text{ km} + 5\text{ km} + 5\text{ km} = 16\text{ km}$.

## 28. Das schwarzhaarige Mädchen

Da weder Heiner, Ludger noch ich mit unseren Schätzungen richtig, aber auch nicht mehr als drei Jahre daneben gelegen hatten, kommen nur die folgenden Alter für das Mädchen infrage:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mein Tipp: | | 20 | 21 | 22 | | 24 | 25 | 26 | | | |
| Ludgers Tipp: | 19 | 20 | 21 | | 23 | 24 | 25 | | | | |
| Heiners Tipp: | | | | | 23 | 24 | 25 | | 27 | 28 | 29 |



Die beiden Alter 24 und 25 Jahre liegen in den Schätzbereichen von allen dreien. Aber nur das Alter von 25 Jahren erfüllt auch die Bedingung, dass einer von uns sich um ein Jahr, einer sich um zwei Jahre und einer sich um drei Jahre verschätzt hatte. Das hübsche schwarzhaarige Mädchen war also 25 Jahre alt.

## 29. Die Kugel

Wenn die Oberfläche $A = 4\pi r^2$ und das Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ einer Kugel ganzzahlige, vierstellige Vielfache von $\pi$ Quadrat- bzw. Kubikzentimetern sind, so müssen für den auch ganzzahligen Radius $r$ folgende Bedingungen erfüllt sein:

$1000\pi \leq 4\pi r^2 \leq 9999\pi$

$1000\pi \leq \frac{4}{3}\pi r^3 \leq 9999\pi$

Die beiden Beziehungen kann man vereinfachen zu

$15 < r < 50$

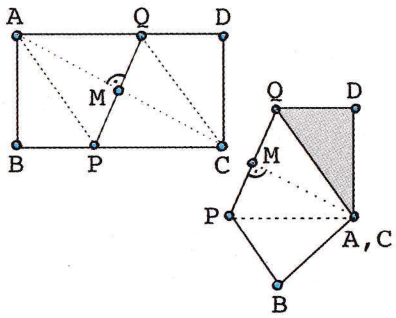
$9 < r < 20.$

Der Radius muss also größer als 15 und kleiner als 20 sein. Da $\frac{4}{3}r^3$ eine ganze Zahl sein soll, muss $r$ durch 3 teilbar sein. Es kommt als Radius also nur ein Wert von 18 Zentimetern infrage.

## 30. Der Knick im Geldschein

Wegen der Symmetrie des Geldscheins müssen die Strecken $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$, $\overline{CP}$ und $\overline{CQ}$ gleich lang sein. Der Knick $\overline{PQ}$ und die Diagonale $\overline{AC}$ halbieren sich also gegenseitig und stehen rechtwinklig aufeinander. Da die Dreiecke $AMQ$ und $ACD$ beide rechtwinklig sind und bei $A$ denselben Winkel haben, gilt für ihre

Seitenverhältnisse $\overline{MQ} : \overline{AM} = \overline{CD} : \overline{AD}$. $\overline{AM}$ und $\overline{MQ}$ sind jeweils halb so lang wie $\overline{AC}$ und $\overline{PQ}$, deshalb kann man die Gleichung auch als $\overline{PQ} : \overline{AC} = \overline{CD} : \overline{AD}$ schreiben. Die Diagonale $\overline{AC}$ des Geldscheins lässt sich mit dem Satz des Pythagoras zu




$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2}$$

berechnen. Dadurch erhält man für die Länge $\overline{PQ}$ des Knicks den Ausdruck

$$\overline{PQ} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2}$$

Mit $\overline{AD} = 140$ mm und $\overline{CD} = 77$ mm bekommt man also eine Knicklänge von etwa 87,88 mm.

## 31. Celsius und Fahrenheit

Die Umrechnungsgleichungen zwischen Celsiustemperaturen $C$ und Fahrenheittemperaturen $F$ sind $F = \frac{9}{5}C + 32^\circ$ und $C = \frac{5}{9}(F - 32^\circ)$.

Eine Möglichkeit, das Problem zu lösen, ist, alle dreistelligen Zahlen systematisch durchzuprobieren, bis man die einzige Temperatur gefunden hat, für die die seltsame Umrechnungsmethode meiner Frau ein richtiges Ergebnis ergibt. Mit etwas Geduld gelangt man damit auch zum Ziel.

Bei einer zweiten Möglichkeit geht man etwas eleganter vor. Jede beliebige dreistellige Zahl – die Fahrenheittemperatur – kann als $F = 100a + b$ geschrieben werden, wobei $a$ eine der neun Ziffern von 1 bis 9 und $b$ eine zweistellige Zahl ist. Die Celsiustemperatur ist folglich $C = 10b + a$. Setzt man dies in die erste der Umrechnungsgleichungen ein, erhält man



$$100a + b = \frac{9}{5}(10b + a) + 32$$

und nach dem Auflösen der Klammer

$$100a + b = 18b + \frac{9}{5}a + 32.$$

Da die linke Seite der Gleichung eine ganze Zahl ergibt, gilt dies auch für die rechte Seite. Folglich muss sich der Bruch $\frac{9}{5}a$ kürzen lassen, was nur möglich ist, wenn $a = 5$ ist.

Setzt man dies in die Gleichung ein und stellt sie dann nach $b$ um, erhält man $b = 27$. Das bedeutet also, dass 527 °F = 275 °C sind.

## 32. Der Rechenkünstler

Um die beiden letzten Stellen des Wertes von $7^{77}$ zu bestimmen, braucht man nicht die komplette Zahl zu errechnen. $7^{77}$ bedeutet, dass man die 7 siebenundsiebzigmal mit sich selbst malnimmt.

Multipliziert man nun eine beliebige Zahl mit 7, und ist man nur an den beiden Endziffern des Ergebnisses interessiert, braucht man auch nur die zwei letzten Stellen der Zahl mit 7 zu multiplizieren. Damit kann man die Lösung nun schrittweise finden.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $7^1 = 7 \cdot 7^0$ | = | 07 | $7^6 = 7 \cdot 7^5$ | = | ... 49 |
| $7^2 = 7 \cdot 7^1$ | = | 49 | $7^7 = 7 \cdot 7^6$ | = | ... 43 |
| $7^3 = 7 \cdot 7^2$ | = | ... 43 | $7^8 = 7 \cdot 7^7$ | = | ... 01 |
| $7^4 = 7 \cdot 7^3$ | = | ... 01 | $7^9 = 7 \cdot 7^8$ | = | ... 07 |
| $7^5 = 7 \cdot 7^4$ | = | ... 07 | | | |

Die beiden Endziffern von $7^n$ wiederholen sich, wie man sieht, alle vier Schritte. Wenn also der Exponent $n$ durch 4 teilbar ist, endet $7^n$ auf 01. Das bedeutet, auch $7^{76}$ hat als letzte Ziffern 01, und $7^{77}$ endet folglich auf 07.

## 33. Der Dorfanger

Da der Umfang $U$ des quadratischen Dorfangers 1200 m betrug, hatte er eine Seitenlänge $a$ von $U/4 = 300$ m und einen Flächeninhalt von $a^2 = 90\,000\ \text{m}^2$. Das bedeutet, dass die drei Weiden jeweils eine Fläche $A$ von $30\,000\ \text{m}^2$ hatten. Für die beiden dreieckigen Weiden gilt nach der Dreiecksformel $A = ab/2$ oder $b = 2a/A = 200$ m. Nun kann man mit dem Satz des Pythagoras die Länge der Seite $c$ berechnen:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{130\,000\ \text{m}^2} \approx 360{,}555\ \text{m}$$

Die beiden Zäune hatten also zusammen eine Länge von ungefähr 721 m.

## 34. Die Nougateier

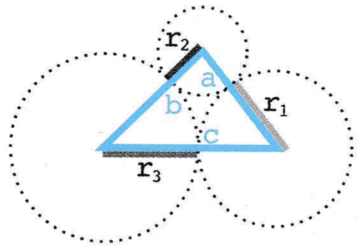
Um Dezimalstellen zu vermeiden, nimmt man an, die Rechnung sei in Cent ausgestellt gewesen. Der Preis von $a246b$ Cent für 72 Nougateier muss ein Vielfaches von 72 sein. Da 72 das Produkt aus 8 mal 9 ist, muss der Preis auch durch 8 und durch 9 teilbar sein. Jetzt kann man zwei einfache Teilbarkeitsregeln anwenden: Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die Zahl, die von ihren letzten drei Stellen gebildet wird, ein Vielfaches von 8 ist. Das bedeutet, in der Zahl $46b$ muss das $b$ so gewählt werden, dass ein durch 8 teilbarer Wert entsteht. Dies ist nur mit $b = 4$ möglich. Durch 9 ist eine Zahl



teilbar, wenn ihre Quersumme ein Vielfaches von 9 ist. Also muss $a + 2 + 4 + 6 + 4$ ein Vielfaches von 9 sein, was zu $a = 2$ führt.
Die 72 Nougateier kosteten folglich 224,64 Euro, und der Preis für ein einzelnes Ei betrug 3,12 Euro.

## 35. Der Garten

Wenn man die Radien der drei Kreise mit $r_1$, $r_2$ und $r_3$ bezeichnet und die Abstände ihrer Mittelpunkte mit $a$, $b$ und $c$, lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:




$$a = r_1 + r_2$$
$$b = r_2 + r_3$$
$$c = r_1 + r_3$$

Addiert man die dritte Gleichung zur ersten, zieht davon die zweite ab und teilt das Ergebnis durch 2, erhält man eine Beziehung für $r_1$, in der nur die Baumabstände $a$, $b$ und $c$ vorkommen.

$$r_1 = \frac{a + c - b}{2}$$

Auf analoge Weise bekommt man auch die Bestimmungsgleichungen für $r_2$ und $r_3$.

$$r_2 = \frac{a + b - c}{2} \qquad r_3 = \frac{b + c - a}{2}$$

Setzt man für $a$, $b$ und $c$ die Werte 70, 80 und 100 Meter ein, erhält man die Radien 45, 25 und 55 Meter. Der größte Rasenkreis in Direktor Talers neuem Garten muss also einen Durchmesser von 110 Metern bekommen.

Das bedeutet, wenn es in der alten Anordnung acht Flaschenreihen gab, so passte in der neuen Anordnung auch noch eine neunte in die Kiste.

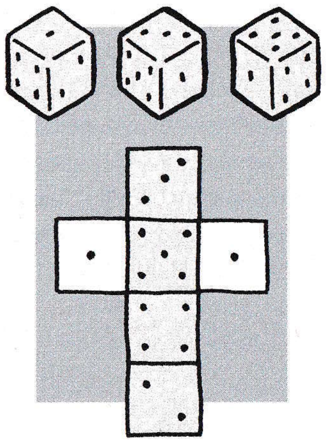
In der alten Anordnung enthielt die Kiste insgesamt $8n$ Flaschen. Da in der neuen Anordnung in jeder zweiten Reihe eine Flasche weniger stand, passten nun $5n + 4\,(n - 1)$ Flaschen in die Kiste. Diese zweite Anzahl musste um mindestens 1 größer sein als die erste.

$$5n + 4\,(n - 1) \geq 8n + 1$$

$$n \geq 5$$

Ich hatte also auf dem Heimweg 41 Flaschen in meiner Weinkiste.

## 39. Der gefälschte Würfel



Die Fotos zeigen drei Ansichten eines Würfels. Wenn man in Gedanken den Würfel im dritten Foto so dreht, dass die Eins und die Fünf so liegen wie im zweiten Würfel, dann ist auf der oberen Fläche die Vier zu sehen. Auf dem zweiten Foto zeigt die obere Fläche jedoch eine Drei. Diesen Widerspruch kann man nur auflösen, wenn man annimmt, dass entweder die Eins oder die Fünf doppelt vorkommt. Wäre die Fünf doppelt, würden nach dem zweiten und dritten Foto an die Flächen mit der Eins zwei Flächen mit einer Fünf und jeweils eine Fläche mit einer Vier und einer Drei grenzen. Das ist jedoch nicht möglich, da nach dem ersten Foto eine der vier an die Eins grenzenden Flächen eine Zwei trägt. Folglich kommt nicht die Fünf, sondern die Eins doppelt vor. Der Rest ist jetzt einfach. Die Zeichnung zeigt eine Abwicklung des Würfels. Auf der unteren Fläche des Würfels im ersten Foto befindet sich also eine Eins.

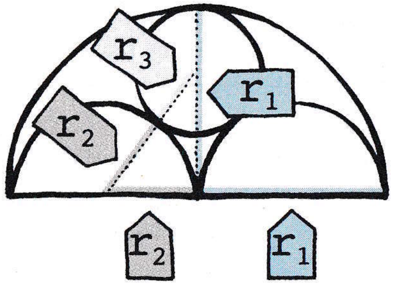
## 40. Die Zigaretten

Aus 175 Kippen konnte mein Großvater 43 Zigaretten drehen, wobei 3 Kippen übrig blieben. Nachdem er diese 43 Zigaretten geraucht hatte, hatte er insgesamt wieder 46 Kippen, aus denen er 11 Zigaretten drehen konnte. Dabei blieben 2 Kippen übrig. Nach dem Rauchen der 11 Zigaretten hatte er 13 Kippen, was wiederum 3 Zigaretten und 1 Kippe ergab. Nachdem er auch diese 3 Zigaretten geraucht hatte, konnte man aus den übrig gebliebenen Kippen noch eine letzte Zigarette drehen. Mit 175 Kippen konnte mein Großvater also insgesamt 58 Zigaretten rauchen.

## 41. Die Schwäger

Bei der einzigen Möglichkeit, dass von drei Männern jeder mit den beiden anderen verschwägert ist, muss der erste Mann mit einer Schwester des zweiten verheiratet sein, der zweite Mann mit einer Schwester des dritten und der dritte Mann mit einer Schwester des ersten. Außerdem können weder die drei Männer Brüder noch die drei Frauen Schwestern sein. Wenn nun auch noch ein vierter Mann mit jedem der drei anderen Männer verschwägert wäre, so müssten entweder mindestens zwei der Männer mit Schwestern des vierten Mannes verheiratet sein, oder mindestens zwei der Männer wären Brüder der Frau des vierten Mannes. Da jedoch auch der vierte Mann mit jedem Paar der drei anderen Männer ein Schwagertrio bilden muss, sind beide Fälle unmöglich, weil im ersten Fall zwei der Frauen Schwestern und im zweiten zwei der Männer Brüder wären. Das bedeutet, eine Gruppe, in der jeder Mann der Schwager jedes anderen Mannes ist, kann höchstens aus drei Männern bestehen.

## 42. Das Fenster




Bezeichnet man die Radien des Fensters und der Scheiben mit $r_1$, $r_2$ und $r_3$, so wie es die Skizze zeigt, kann man mit dem Satz des Pythagoras die Seiten des eingezeichneten Dreiecks berechnen.

$$(r_1 - r_3)^2 + r_2^2 = (r_2 + r_3)^2$$

Ersetzt man nun $r_2$ durch $\frac{r_1}{2}$ und löst die Gleichung nach $r_3$ auf, erhält man $r_3 = \frac{r_1}{3}$. Mit Hilfe der Kreisflächengleichung $A = \pi r^2$ ergibt sich:

$$A_{\text{blau}} = \frac{1}{4}\pi r_1^2 \qquad A_{\text{rot}} = \frac{1}{9}\pi r_1^2 \qquad A_{\text{gelb}} = \pi r_1^2 - A_{\text{blau}} - A_{\text{rot}} = \frac{5}{36}\pi r_1^2$$

Setzt man $r_1 = 1\,\text{m}$ ein und multipliziert die einzelnen Flächen mit den entsprechenden Preisen, so ergibt sich für das Glas ein Gesamtpreis von 263,89 Euro.



## 43. Das Puzzle

Angenommen, bei dem Puzzle besteht die längere Seite aus $a$ und die kürzere aus $b$ Teilchen. Dann hat das gesamte Spiel $a \cdot b$ und das Innere $(a-2)(b-2)$ Teilchen. Dabei müssen $a$ und $b$ mindestens 3 sein, damit es überhaupt ein Puzzle-Inneres gibt. Da die Innenfläche aus der Hälfte aller Teilchen bestehen soll, gilt $ab = 2(a-2)(b-2)$. Löst man diese Gleichung nach $a$ auf, erhält man $a = 4(b-2)/(b-4)$. Um für $a$ einen positiven Wert zu bekommen, muss der Nenner positiv und somit $b \geq 5$ sein. Setzt man in die Gleichung $b = 5$ oder $b = 6$ ein, bekommt man $a = 12$ bzw. $a = 8$. Ein $b$, das größer als 6 ist, ergibt immer ein $a$, das kleiner als $b$ ist. Deshalb scheiden diese Fälle als Lösung aus. Die beiden einzigen möglichen Puzzlegrößen sind also $5 \cdot 12 = 60$ und $6 \cdot 8 = 48$ Teilchen. Sarahs Puzzle bestand somit aus 60 Pappstückchen.

## 44. Die Erdbeeren

Die 100 kg frischen Erdbeeren bestanden am Morgen aus 99 kg Wasser und 1 kg Erdbeer-Trockenmasse. Weil nur Wasser verdunsten kann, nicht aber Trockenmasse, enthielten die eingetrockneten Erdbeeren am Abend immer noch 1 kg Trockenmasse. Da sie dann zu 98 % aus Wasser bestanden, mussten die restlichen 2 % dieses eine Kilogramm sein. Folglich sind 100 %, also das Gesamtgewicht der eingetrockneten Erdbeeren, genau 50 kg.